4.3. PROBLEMLER.

4.3.1. Aşağıda verilenlere göre tanımı kullanarak $D_{\mathbf{u}}f(p_0)$ yönlü türevini bulunuz.

a) $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$; $p_0 = (2,1)$, $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

b) $f(x,y) = y^2 - xz + 2xy$; $p_0 = (1,-2,1)$, $\mathbf{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4.3.2. $f(x,y) = x^2 + y^2 = 25$ ve $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ dir. $\theta = 0°, 45°, 90°$ değerleri için $D_{\mathbf{u}}f((4,3))$ 'ü bulunuz. $D_{\mathbf{u}}f((4,3)) = 0$ olacak şekilde $\mathbf{u}$ vektörünün yönünü belirtiniz.

4.3.3. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin verilen noktalarda ve belirtilen yönde yönlü türevini bulunuz.

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$, $p_0 = (1,1)$, $\mathbf{v} = e_1 + e_2$.

b) $f(x,y,z) = xy^2 + 2yz + 3zx^2$, $p_0 = (1,-2,3)$, $\mathbf{v} = e_1 - e_2 + e_3$.

4.3.4. a) $f(x,y) = xe^y$, $P = (2,0)$ ve $Q = (1/2, 2)$ olsun. f nin P noktasında $\overrightarrow{PQ}$ yönündeki yönlü türevini bulunuz. P noktasında türevin maksimum olduğu yönü ve maksimum değerini bulunuz.

b) $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2x$ fonksiyonunun $P = (1,-4,3)$ noktasından $Q = (2,-1,8)$ noktası yönünde yönlü türevini bulunuz. P de f nin maksimum değişim oranı nedir?

4.3.5. Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalarda en hızlı artan oldukları yöndeki u birim vektörünü belirtiniz ve bu yöndeki yönlü türevlerini bulunuz.

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$, $(1,1)$ c) $f(x,y) = e^x\cos y + e^y \sin x$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

b) $f(x,y,z) = xy^2 + 2yz^2 + 3zx^2$, $(1,-2,-3)$.

4.3.6. $g(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ ve $\mathbf{v} = xe_1 + ye_2$ ise

$$\operatorname{grad} g(x,y) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

olduğunu gösteriniz.

4.3.7. Uzayda (x,y,z) noktasındaki sıcaklık $T(x,y,z) = 100/(x^2+y^2+z^2)$ olarak veriliyor. $p = (1,3,-2)$ noktasında $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektörü yönünde T nin yönlü türevini bulunuz. p noktasında hangi yönde T en hızlı olarak artar. T nin p deki maksimum değişme oranı nedir?

4.3.8. $f(x, y, z) = x - yz + z^2$ nin $(1, 1, -1)$ noktasında $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, -t^3)$ eğrisinin yönünde (eğriye teğet vektör yönünde) yönlü türevini bulunuz ($t = 1$ 'e karşılık gelen nokta).

4.3.9. Düzlemde bir yönü, kutupsal bir açı ile belirtebiliriz. Pozitif yönde $x-$ekseni ile α açısı yapan yön, $\mathbf{u}_\alpha = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}$ birim vektörüne karşılık gelir. f nin (x, y) noktasında bu yöndeki yönlü türevi

$$D_{\mathbf{u}_\alpha} f(x, y) = \mathbf{u}_\alpha . \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\cos\alpha + f_y(x, y)\sin\alpha$$

dır. $f(x, y)$ nin, pozitif yönde $x-$ekseni ile α açısı yapan yönde $D^2_{\mathbf{u}_\alpha} f(x, y)$ ikinci yönlü türevini bulunuz. $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/2$ için bu türevin değerini bulunuz.

4.3.10. $xy^3 + 6x^2y = -7$ eğrisinin $(1, -1)$ noktasındaki iki normalini bulunuz.

4.3.11. Gradyen vektörünü kullanarak $z^2 - x^2 - y^2 = 4$ 'ün $(1, 2, 3)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

4.3.12. Gradyen vektörünü kullanarak $x^3 + y^4 - z^5 = 10$ yüzeyinin $(2, -1, -1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini ve normalini bulunuz.

4.3.13. $f(x, y) = xy$ nin $(1, 2)$ ve $(-3, 1)$ noktalarındaki gradyenlerini ve bu noktalardan geçen seviye eğrilerini çiziniz.

4.3.14. $z = f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y$ nin $(1, 2)$ ve $(-1, -1)$ noktalarından geçen seviye eğrilerini çiziniz ve bu noktalardaki gradyen vektörlerini bulunuz.

4.3.15. $w = \sqrt{x - y} - \ln z$ nin $(3, -1, 1)$ noktasından geçen seviye yüzeyinin denklemini bulunuz.

4-3.16. $z = x^2 - y^2$ ve $xyz + 6 = 0$ yüzeylerinin arakesit eğrisinin $(1, 2, -3)$ noktasındaki teğet vektörünün bulunuz.

4-3.17. $z = f(x, y) = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$ nin $z = 0,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3}$ değerlerine karşılık gelen izlerini ve seviye eğrilerini çiziniz. $-\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}$ için yüzeyin grafiğini belirtiniz.

4.3.18. $\mathbb{R}^3$ deki bir bölgenin (x, y, z) noktasındaki sıcaklığı $T(x, y, z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$ denklemi ile veriliyor. $T = 64$ ve $T = 36$ için seviye yüzeylerini (izotermal yüzeylerini) belirtiniz.

4.3.19. $z = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2$ yüzeyinin $z = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$ için seviye eğrilerini çiziniz.

4.3.20.

$$f(x,y,z) = \frac{2z}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

nin tanım kümesini ve $f=1$, $f=-2$ için seviye yüzeylerini bulunuz.

4.3.21. $f :\to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olarak tanımlanıyor. Bu fonksiyonun her $\mathbf{v}$ vektörü için $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ yönlü türevinin mevcut olduğunu fakat f nin $(0,0)$ da diferensiyellenemediğini gösteriniz. •

4-4. Kapalı fonksiyon ve ters fonksiyon teoremleri

Bu başlıkta verilen bir denklemdeki bir değişkenin, denklemdeki diğer değişkenlerin bir fonksiyonu olarak çözülebilmesi ile ilgili yeterli şartları vererek bir denklem yardımıyla tanımlanmış fonksiyonların türevlerini ve diferansiyellerini bulmaya çalışacağız. Tek değişkenli fonksiyonlarla çalışırken iki değişkenli denklemlerin çözümü olarak (kapalı bir şekilde) tanımlanmış fonksiyonlarla karşılaşırız. $F(x,y) = 0$ 'ın böyle bir denklem olduğunu farzedelim. (x_0,y_0) noktasının bu denklemi sağladığını ve F nin birinci kısmi türevlerinin (x_0,y_0) nin bir civarında sürekli (böylece diferensiyellenebilir) olduğunu farzedelim. Bu denklemden meselâ y yi (x_0,y_0) nin bir civarında x 'e göre çözebilir miyiz? Yani $I = (x_0-h, x_0+h)$ aralığında tanımlı ve $y = f(x_0) = y_0$ olmak üzere $x \in I$ için

$$F(x, f(x)) = 0$$

olacak şekilde bir $y = f(x)$ fonksiyonu varmıdır? Böyle bir fonksiyon varsa $F(x,y) = 0$ denkleminin x 'e göre kapalı olarak türevini alarak onun (x_0,y_0) deki değeri yardımıyla $y = f(x)$ 'in $x = x_0$ daki türevini bulabiliriz. $F(x,y) = 0$ ın grafiği olan eğrinin Şekil 4.11. de belirtilen $N_\delta(x_0,y_0)$ civarındaki kısmı, düşey bir doğru tarafından sadace bir noktada kesildiğinden o, $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonunun grafiğidir. Eğri üzerinde bu özelliğin sağlanmadığı noktalar sadece Q_1 ve Q_2 noktalarıdır. Bu noktalarda eğrinin düşey teğetleri vardır. Yani $F_y(x,y) = 0$ dır. Bu husus ileride ispatlıyacağımız kapalı fonksiyon teoreminin özel halidir. Şimdi konuya bir örnekle (daha analitik olarak) yaklaşmak için

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0 \tag{4.28}$$